Universitatea Politehnica Timişoara

Piaţa Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timişoara
Tel: +40 256 403000
Fax: +40 256 403021
rector@rectorat.upt.ro
www.upt.ro

Automatizări şi optimizări în industria alimentară

Curs 9

2019

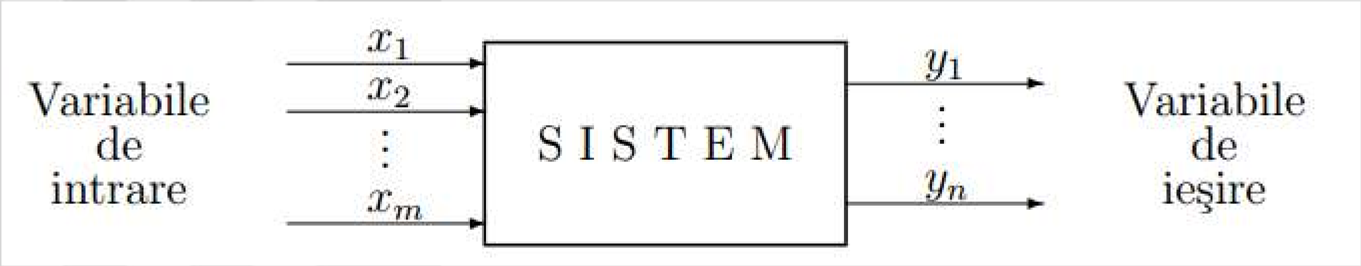
6. Modelul matematic

Universitatea Politehnica Timişoara

În procesul de optimizare, modelarea matematică reprezintă o etapă importantă, scopul său fiind de a identifica relațiile matematice ce descriu procesul ce urmează a fi optimizat. Elaborarea unui model matematic este necesară deoarece, indiferent de criteriul de optimizare ales problema de optimizare depinde de variabilele sistemului.

Din punct de vedere al problemei de optimizare, variabilele sistemului pot fi grupate în: variabile de decizie și variabilele dependente.

Un sistem este caracterizat prin mărimi de intrare, mărimi de stare și mărimi de ieșire.



În cadrul unei probleme de optimizare, o parte dintre mărimile de intrare sunt utilizate pentru obținerea soluției. Acele mărimi se numesc variabile de decizie.

6. Modelul matematic

Modelul matematic este constituit dintr-un sistem de ecuații algebrice liniare sau neliniare atunci când vorbim de un model matematic staționar sau dintr-un sistem de ecuații diferențiale atunci când se determină un sistem matematic dinamic.

În cadrul modelului matematic variabilele de ieșire sunt exprimate în funcție de variabilele de intrare.

Modelele matematice pot fi clasificate astfel:

- analitice - bazate pe ecuații de conservare, legi ale proceselor fizice și chimice ce au loc în sistemul modelat;
- statistice - bazate pe determinările experimentale efectuate în cadrul sistemului modelat;
- mixte – bazate atât pe ecuații de conservare (masă, energie, impuls), legi ale proceselor ce au loc în sistem cât și pe rezultatele experimentale.

Fiecare din aceste tipuri de modele matematice prezintă avantaje și dezavantaje ce permit utilizarea lor doar în anumite situații.

6. Modelul matematic

Modelele matematice analitice

AVANTAJE

- domeniu de valabilitate extins;
- flexibilitate mărită (modelul matematic poate fi utilizat și la modelarea sistemelor similare).

DEZAVANTAJE

- necesită o bună cunoaștere a fenomenelor ce au loc în cadrul sistemului modelat;
- modelul matematic poate fi foarte complex și greu de utilizat;
- este nevoie de o etapă de validare a modelului ce înseamnă că rezultatele modelului trebuie comparate cu date experimentale;
- este nevoie de cunoașterea unor limbaje de programare care să permită rezolvarea ecuațiilor modelelor matematice.

Piața Victoriei nr. 2, RO 300006 - Timișoara, Tel: +40 256 403000, Fax: +40 256 403021, rector@rectorat.upt.ro, www.upt.ro

6. Modelul matematic

Modelele matematice statistice

AVANTAJE

- sunt mult mai simple din punct de vedere matematic;
- nu necesită cunoștințe despre fenomenele și procesele ce au loc în cadrul sistemului modelat;
- necesită cunoașterea unui algoritm matematic simplist, indiferent de sistemul pentru care se elaborează modelul matematic.

DEZAVANTAJE

- necesită un set de date experimentale destul de mare;
- modelele matematice obținute sunt valabile doar pe domeniul datelor experimentale utilizate în elaborarea lor. Aplicarea acestor modele matematice pe alte sisteme, chiar similare, implică efectuarea unor noi măsurători experimentale în noul sistem;

Modelele matematice mixte încearcă să preia avantajele celor două modele anterioare și să elimine dezavantajele acestora. Astfel acestea sunt mai simple decât cele analitice (deoarece se bazează și pe date experimentale) și sunt mai ușor adaptabile la sisteme similare (deoarece au la bază legile conservării și cele ale fenomenelor fizice și chimice).

Piața Victoriei nr. 2, RO 300006 - Timișoara, Tel: +40 256 403000, Fax: +40 256 403021, rector@rectorat.upt.ro, www.upt.ro

6. Modelul matematic

Modelele matematice statistice

Elaborarea unui model matematic statistic implică realizarea de determinări experimentale astfel încât să existe un număr suficient de informații experimentale pentru a se putea obține un model matematic utilizabil.

De obicei se apelează la modelarea statistică a unui proces atunci când:

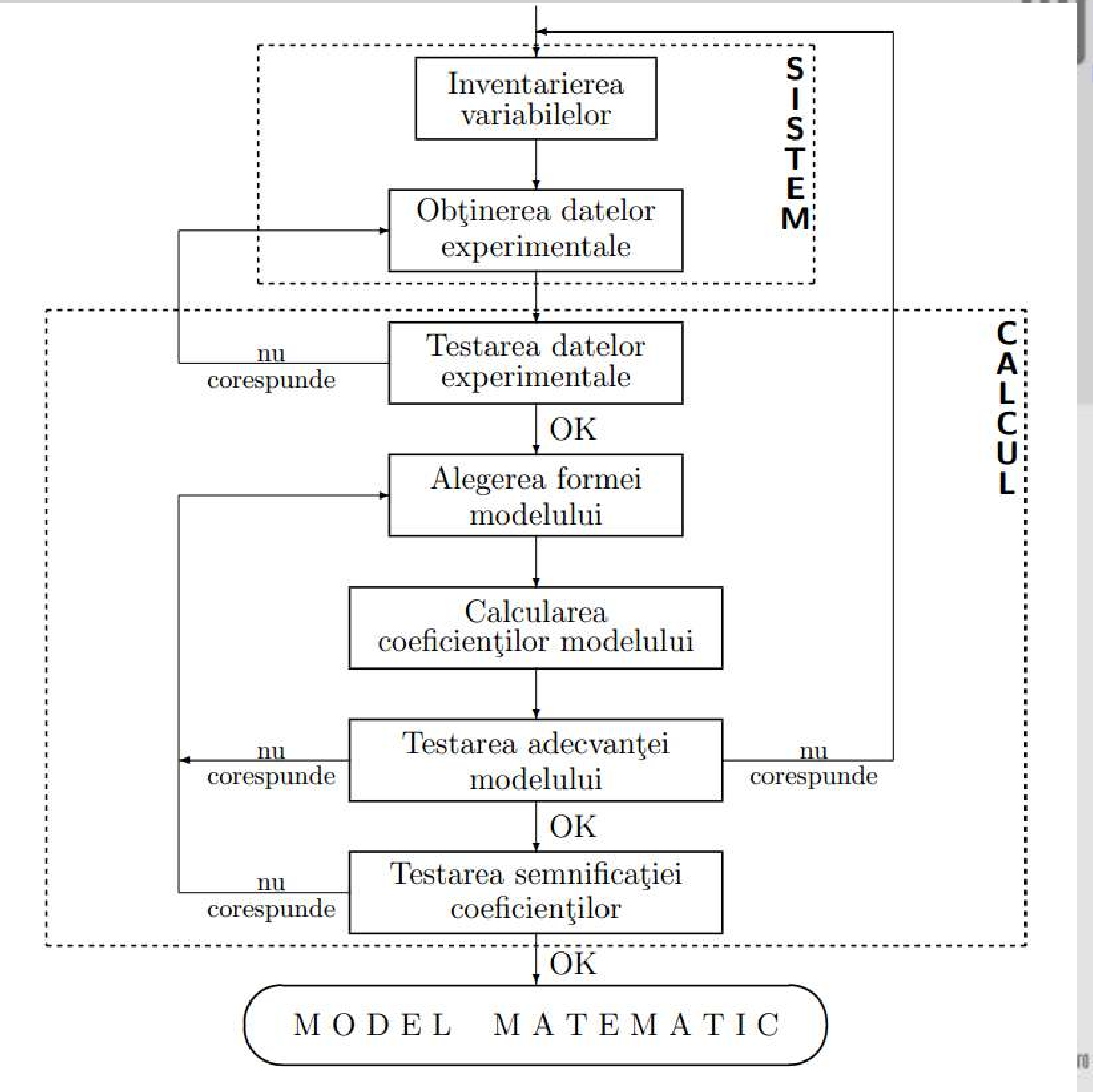
- procesul este insuficient de bine cunoscut
- procesul este prea complex.

Un model matematic statistic va conține întotdeauna un număr de ecuații egal cu numărul de variabile dependente existente în sistemul studiat. Fiecare din aceste ecuații trebuie să redea evoluția variabilei dependente în raport cu variabilele de decizie. Algoritmul matematic utilizat pentru determinarea acestor ecuații se numește **analiză de regresie.**

Analiza de regresie - succesiunea de etape, în urma cărora se determină o ecuație de corelare a unei mărimi de ieșire (variabilă dependentă) în funcție de o serie de mărimile de intrare (variabile de decizie).

Schematic etapele unei analize de regresie sunt următoarele:

6. Modelul matematic



6. Modelul matematic

1. Inventarierea variabilelor

În cadrul acestei etape se realizează o listă cu toate variabilele semnificative ale procesului investigat. Neincluderea unei variabile semnificative în modelul matematic conduce la obținerea unui model al procesului eronat.

În situația în care, în modelul matematic, sunt incluse variabile nesemnificative, modelul nu este afectat deoarece pe parcursul algoritmului de determinare aceste variabile sunt eliminate.

În construirea listei cu variabile semnificative trebuie avut în vedere faptul că numărul de date experimentale necesare crește exponențial cu numărul de variabile.

6. Modelul matematic

2. Obținerea datelor experimentale

În cadrul acestei etape se realizează o listă cu toate variabilele semnificative ale procesului investigat. Neincluderea unei variabile semnificative în modelul matematic conduce la obținerea unui model al procesului eronat.

În situația în care, în modelul matematic, sunt incluse variabile nesemnificative, modelul nu este afectat deoarece pe parcursul algoritmului de determinare aceste variabile sunt eliminate.

În construirea listei cu variabile semnificative trebuie avut în vedere faptul că numărul de date experimentale necesare crește exponențial cu numărul de variabile.

6. Modelul matematic

a) Experimente programate

Un experiment programat implică identificarea (prin intermediul unui anumit algoritm) a acelor combinații de valori ale variabilelor independente prin intermediul cărora se poate obține un număr maxim de informații despre sistemul analizat cu un volum minim de date experimentale.

Cea mai frecventă metodă de programare a experimentelor este **metoda de programare factorială**. Conform acestei metode, numărul total de experimente, notat cu **m**, se calculează cu formula:

$$m = z^n,$$ n – numărul de factori; z – numărul de nivele de experimentale.

În cazul unui model liniar z=2, iar pentru modele mai complexe valoarea lui z crește.

Pentru un experiment factorial cu z=2 se au în vedere următoarele aspecte:

- Pentru fiecare variabilă se aleg două nivele: nivelul inferior – $x_{i,min}$ și nivelul inferior – $x_{i,max}$. În acest mod se realizează acoperirea întregului domeniu de variație a variabilelor independente.

6. Modelul matematic

- Se realizează codificarea variabilelor cu valorile **-1, 0, 1,** în conformitate cu expresiile:

$$x_i^0 = \frac{x_{i,max} + x_{i,min}}{2}; \quad \text{nivelul de bază al variabilei } x_i$$

$$\Delta x_i = \frac{x_{i,max} - x_{i,min}}{2}; \quad \text{unitatea intervalului variabilei } x_i$$

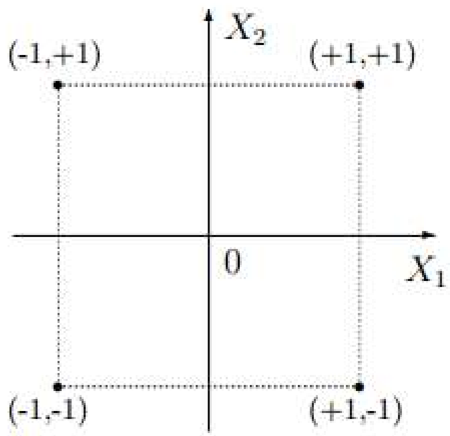
$$X_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i}; \quad \text{valorile codificate ale variabilei } x_i$$

$$x_i = x_{i,max} \Rightarrow X_i = 1$$

$$x_i = x_{i,min} \Rightarrow X_i = -1$$

Matricea unui experiment factorial cu 2 nivele are următoarea formă:

6. Modelul matematic



Număr experiment	Factori X_1	Factori X_2	Mărimea dependentă
1	+1	+1	Y_1
2	+1	−1	Y_2
3	−1	+1	Y_3
4	−1	−1	Y_4

Această codificare permite o simplificare a volumului de calcul a constantelor modelului precum și o schematizare a operației de programare a experimentelor.

b) Experimente aleatorii

În cazul în care experimentele programate nu sunt posibile, se vor utiliza datele obținute din urmărirea curentă a sistemului. Această modalitate de experimentare se numește experiment aleator. În această situație numărul de experimente necesare este mult mai mare și există posibilitatea de a identifica corelații inexistente între variabilele procesului.

6. Modelul matematic

3. Testarea datelor experimentale

Procesul de măsurare este influențat de erori ce pot avea cauze multiple:

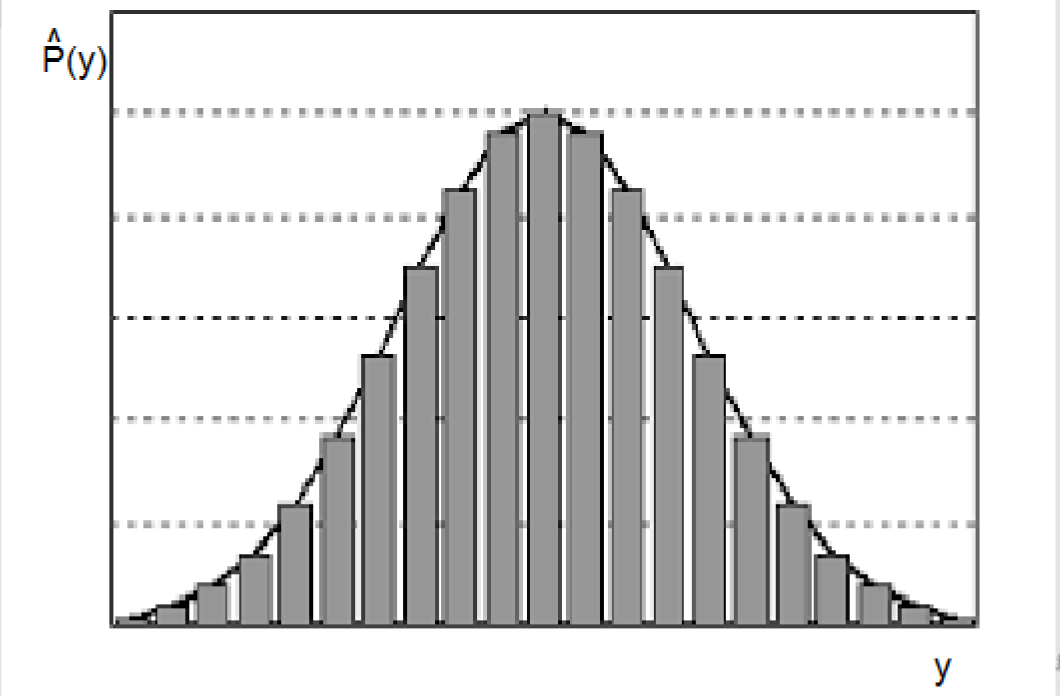
- imprecizia măsurătorilor efectuate;
- apariția unor fluctuații ale parametrilor considerați constanți;
- influența unor factori ce nu au fost considerați;
- subiectivitatea observatorului.

Datorită acestor motive, valoarea măsurată a variabilei dependente va diferi de valoarea reală ce poate fi doar estimată. Testarea datelor experimentale implică două aspecte:

- ➢ respectarea ecuațiilor de conservare în cadrul fiecărui experiment (fiecare set de date trebuie să îndeplinească bilanțul de materiale și termic);
- ➢ seturile de date trebuie supuse unor teste de natură statistică (testarea reproductibilității datelor, calculul dispersiei, verificarea omogenității dispersiei și a omogenității distribuției).

6. Modelul matematic

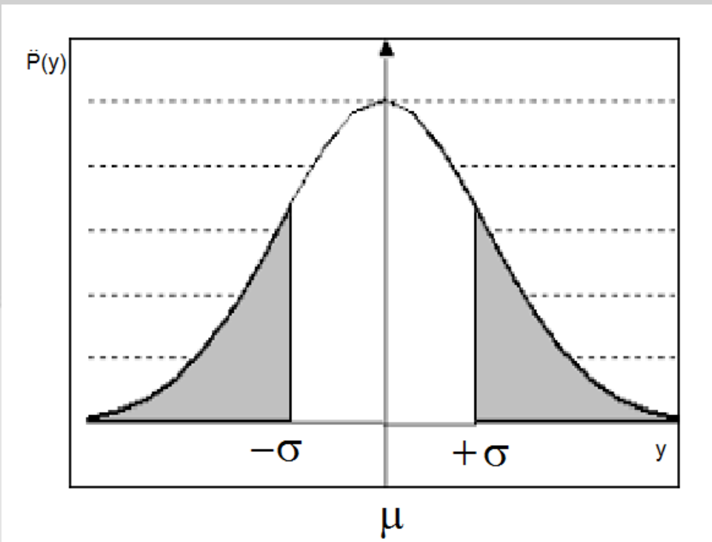
Datorită caracterului aleator al experimentelor, valoarea reală a variabilei măsurate poate fi doar estimată. Valorile măsurate vor fi împrăştiate în jurul valorii reale. Această împrăştiere a datelor este foarte bine descrisă de distribuţia normală Gauss Laplace. Conform acestei teorii, dacă asupra unei mărimi oarecare, notată cu y, se realizează un număr mare de măsurători în aceleaşi condiţii, prin reprezentarea grafică a frecvenţei relative a funcţiilor de valoarea măsurată se obţine un grafic de forma:



6. Modelul matematic

$$\hat{P}(y) = \frac{m}{n} = \frac{numar\ cazuri\ favorabile}{numar\ \ total\ de\ experimente}$$

Dacă n$\rightarrow\infty$ frecvența relativă se transformă în probabilitate, notată cu P.



$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

μ – medie

σ^2 – dispersie

P(y) – funcția densității distribuției de probabilitate

Clopotul lui Gauss

Probabilitatea ca y să ia valori într-un interval [y_1, y_2] se calculează cu următoarea expresie:

$$P(y \in [y1, y2]) = \int_{y1}^{y2} P(y)dy$$

Piața Victoriei nr. 2, RO 300006 - Timișoara, Tel: +40 256 403000, Fax: +40 256 403021, rector@rectorat.upt.ro, www.upt.ro

6. Modelul matematic

Distribuția normală este complet caracterizată atunci când se cunosc: valoarea mediei (μ), valoarea dispersiei (σ^2) și valoarea abaterii standard (σ).

Statistic 68,3% din datele experimentale se află în intervalul [$\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$], iar 95% din datele experimentale se află în intervalul [$\mu-2\sigma$, $\mu+2\sigma$].

În practică numărul de determinări nu poate fi infinit. Prin urmare, pentru calculul mediei se folosește următoarea relație:

$$\mu \cong \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{suma\ valori\ masurate}{numar\ total\ valori}$$

Corespunzător, expresia de calcul a dispersiei este:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Yi - \bar{y})^2}{n-1}$$

Datele experimentale ce nu corespund testelor de mai sus vor fi înlocuite prin efectuarea unor noi măsurători.

6. Modelul matematic

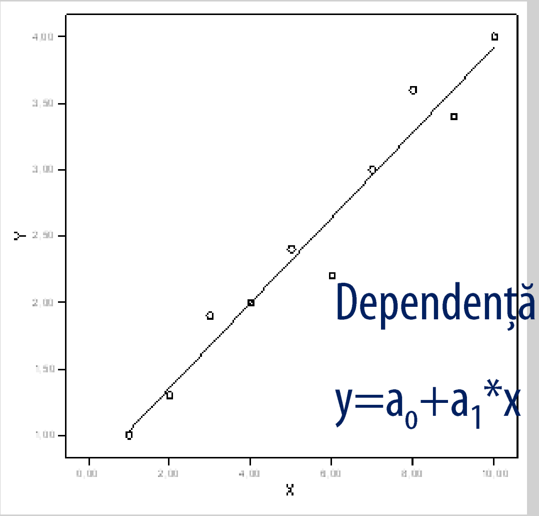
4. Alegerea formei modelului matematic

În cazul regimului staționar, forma de bază a modelului matematic este cea a unui sistem de ecuații algebrice. În mod frecvent, stabilirea numărului de ecuații ale modelului matematic se face prin împărțirea variabilelor în variabile independente (variabile de intrare), respectiv variabile dependente (variabile de ieșire). Această împărțire reprezintă o problemă de experiență. Științific, identificarea tipurilor de variabile se realizează prin determinarea modelului matematic analitic.

Dacă se notează cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$, variabilele independente și cu $y_1, y_2, \ldots, y_k$, variabilele dependente, atunci pentru dependențele de forma: $y_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 1,2, \ldots, k$, nu există reguli fixe de determinare.

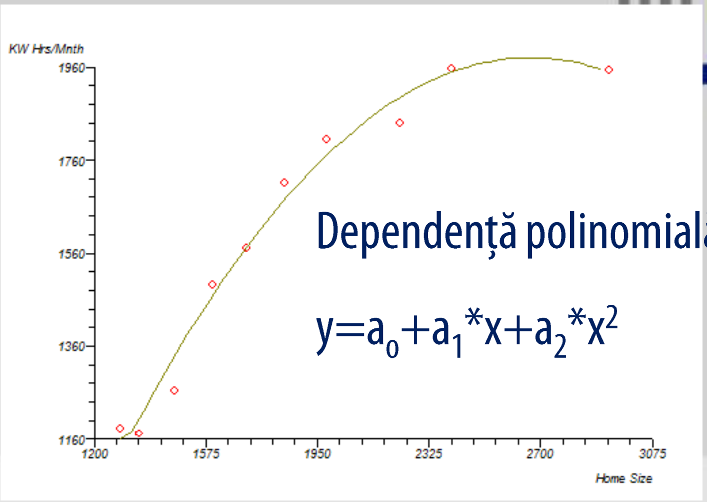
În situația în care avem o singură variabilă independentă, reprezentarea grafică a datelor experimentale poate sugera forma dependenței dintre acestea.

6. Modelul matematic



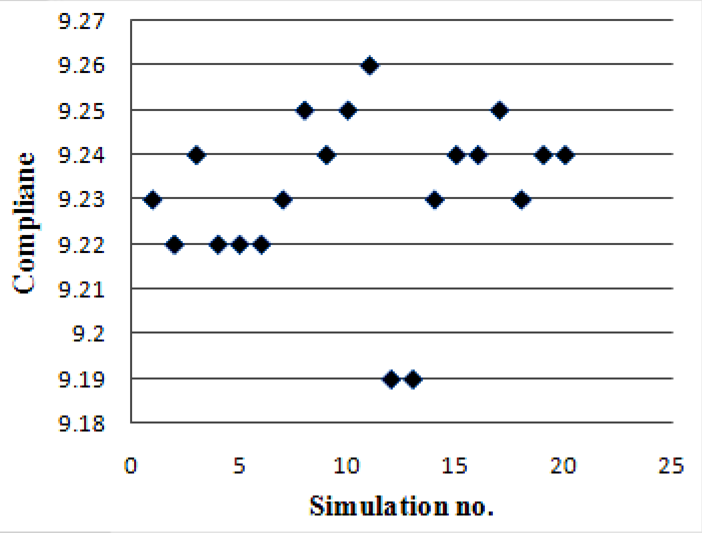
Dependență liniară

$y=a_0+a_1*x$



Dependență polinomială de ordinul II

$y=a_0+a_1*x+a_2*x^2$



Nu există dependență

6. Modelul matematic

5. Determinarea coeficienților modelului matematic

Pentru determinarea coeficienților se consideră următoarele ipoteze:

- Variabila de ieșire este o variabilă aleatoare de distribuție normală;
- Variabilele de intrare sunt nealeatoare, valoarea măsurată a acestora reprezentând valoarea reală;
- Mărimile de intrare sunt reciproc independente.

Determinarea coeficienților modelului se face prin diferite metode, dependent de natura acestuia. Prin substituirea în ecuația modelului matematic a seturilor de valori numerice obținute experimental rezultă un sistem de ecuații (numărul ecuațiilor este egal cu numărul total de experimente realizate).

Coeficienții modelului reprezintă necunoscutele sistemului. Pentru alegerea valorilor coeficienților care satisfac toate ecuațiile, este necesară adoptarea unui criteriu de optimizare ce urmează a fi minimizat.

6. Modelul matematic

Universitatea Politehnica Timişoara

Cel mai frecvent criteriu utilizat în prelucrarea datelor experimentale cu eroare de măsurare normal distribuită este **suma pătratelor abaterilor valorilor experimentale față de valorile calculate cu ajutorul modelului matematic**.

Expresia matematică este: $$F = \sum_{j=1}^{m} (y_{exp,j} - y_{calc,j})^2$$

$y_{exp,i}$ – valorile măsurate experimental ale variabilei dependente

$y_{calc,i}$ – valorile calculate cu ajutorul modelului matematic

Minimizarea acestei funcții obiectiv se realizează printr-o metodă de optimizare adecvată. Dacă forma modelului matematic propus este una liniară sau expresia matematică poate fi liniarizată, se apelează la derivarea funcției obiectiv F în raport cu coeficienții modelului și se trece la rezolvarea sistemului de ecuații rezultat prin anularea derivatelor. Această metodă se numește **metoda celor mai mici pătrate**. Aceasta este frecvent utilizată, sistemul de ecuații obținut fiind întotdeauna liniar.