Universitatea Politehnica Timişoara

Piaţa Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timişoara
Tel: +40 256 403000
Fax: +40 256 403021
rector@rectorat.upt.ro
www.upt.ro

Automatizări şi optimizări în industria alimentară

Curs 10

2019

6. Tehnici de optimizare

Universitatea Politehnica Timişoara

Metode de căutare directă a optimului

Metode numerice de căutare pentru probleme unidimensionale (funcţii scop de o singură variabilă de decizie)

Căutarea optimului se efectuează calculând mai multe valori ale funcţiei scop, compararea acestor şi restrângerea intervalului în care se poate afla extremul.

După modul de stabilire a valorilor variabilei independente şi respectiv după succesiunea efectuării calculelor, distingem:

- **Metode simultane de căutare**: se stabilesc de la început toate valorile care se vor atribui variabilei independente;
- **Metode secvenţiale**: la început se atribuie un număr limitat de valori variabilei independente, iar următoarele valori atribuite vor depinde de valorile funcţiei scop.

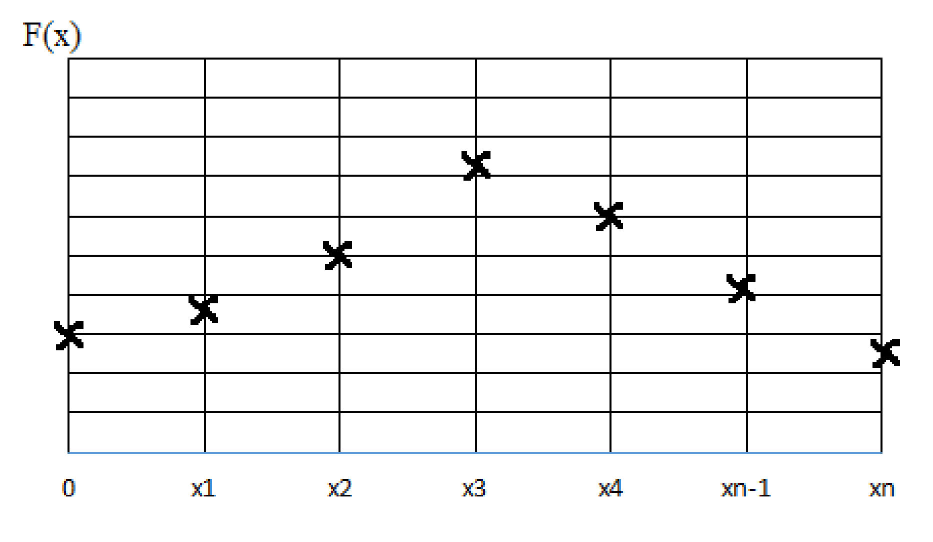
6. Tehnici de optimizare

1. Metoda căutării echidistante

Principiul metodei:

- Se dau n valori variabilei independente, astfel încât toate să fie amplasate la distanțe egale

$$x_1 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1}$$



- Se calculează valoarea funcției scop în cele n puncte: F(x1), F(x2), F(x3), …, F(xn)

- Se localizează valoarea cea mai mare sau cea mai mică a funcției scop. Cele două intervale vecine valorii maxime sau minime, însumate vor reprezenta **intervalul de incertitudine (precizia de localizare)**.

Metoda poate fi aplicată în două variante:

- Varianta simultană;
- Varianta simultan – secvențială.

6. Tehnici de optimizare

Varianta simultană:

- Se stabilește de la început numărul n de valori ce va fi atribuit variabile independente; acesta se alege în funcție de precizia dorită de localizare a optimului;
- la n valori atribuite variabilei independente vom avea n+1 intervale egale $\Rightarrow$ intervalul de incertitudine are valoarea:

$$l_n = \frac{2}{n+1}$$

Ex: Câte valori trebuie sa dam variabilei independente pentru a avea un interval de incertitudine egal cu 0,2.

6. Tehnici de optimizare

Varianta simultan-secvențială:

- La începutul căutării se aplică un număr n_1 de valori variabilei independente x.
- Se procedează ca la varianta simultană şi se identifică intervalul de incertitudine.
- Se continuă căutarea în acest interval, dând un număr n_2 de valori variabilei independente şi identificând noul interval de incertitudine. (se aplică succesiv varianta simultană)

Dacă se efectuează k secvențe, iar variabila independentă va primi de fiecare dată același număr n_1 de valori, expresia intervalului de incertitudine va fi:

$$l_n = \left(\frac{2}{n_1 + 1}\right)^k$$

Numărul total de evaluări ale funcției scop va fi: $n = n_1 \cdot k$

6. Tehnici de optimizare

Ex: 1. Dacă se foloseşte metoda căutării echidistante, varianta simultană, care este numărul de valori ce trebuie atribuite variabilei independente pentru a obține o precizie de localizare a optimului $l_n = 0{,}01$?

2. Dacă se foloseşte varianta simultan secvențială, care va fi numărul total de valori acordate variabilei independente pentru a obține acelaşi interval de incertitudine ? Se cunoaște că numărul de valori atribuite variabile independente în fiecare secvență este $n_1 = 4$.

3. În ce situație numărul de valori atribuite variabilei independente este mai mic?

6. Tehnici de optimizare

2. Metoda Fibonacci – metodă pur secvențială

Secvența 1: se dau două valori variabilei independente;

Secvențele 2 – k: se atribuie o singură valoare nouă care va forma o pereche cu o valoare existentă din secvența precedentă.

Modul de fixare al perechilor secvențiale se bazează pe seria de numere întregi numită Fibonacci. În această serie, fiecare element este suma celor două elemente precedente.

$$\theta_0 = \theta_1 = 1$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \theta_{n-2}$$

Tabela 4.2. Valorile şirului lui Fibonacci.

n	$(Fi)_n$	n	$(Fi)_n$	n	$(Fi)_n$
0	1	11	144	22	28.657
1	1	12	233	23	46.368
2	2	13	377	24	75.025
3	3	14	610	25	121.393
4	5	15	987	26	196.418
5	8	16	1.597	27	317.811
6	13	17	2.584	28	514.229
7	21	18	4.181	29	832.040
8	34	19	6.765	30	1.346.269
9	55	20	10.946	31	2.178.309
10	89	21	17.711	32	3.524.578

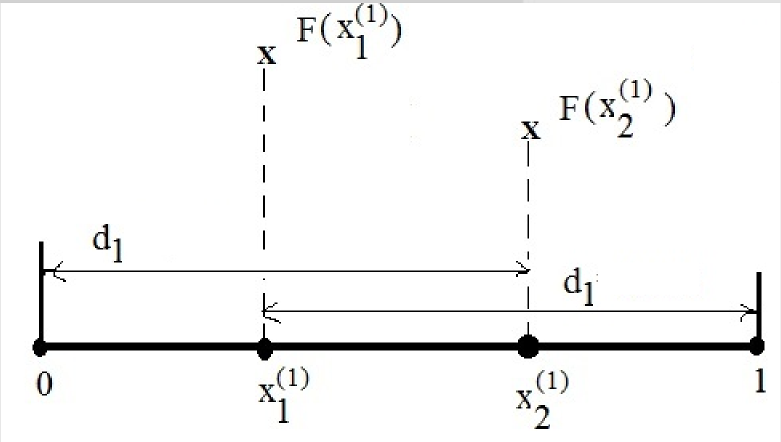
Piața Vict

6. Tehnici de optimizare

Schema de căutare este:

Pasul 1:

- fie [0,1] intervalul normat de variație a variabilei independente. Presupunem ca avem o funcție cu un maxim. Se calculează valoarea segmentului subunitar: $d_1 = \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} \cdot 1$
- Se stabilesc pozițiile punctelor de căutare x_1 și x_2:



$$x_1^{(1)} = 1 - d_1 = 1 - \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} = \frac{\theta_{n-2}}{\theta_n}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}$$

- se determină valoarea funcției scop F(x) în aceste două puncte.
- Dacă $F(x_1^{(1)}) > F(x_2^{(1)})$, maximul se va găsi în intervalul $[0; x_2^{(1)}]$. Lungimea sa este d_1.

6. Tehnici de optimizare

Pasul 2:

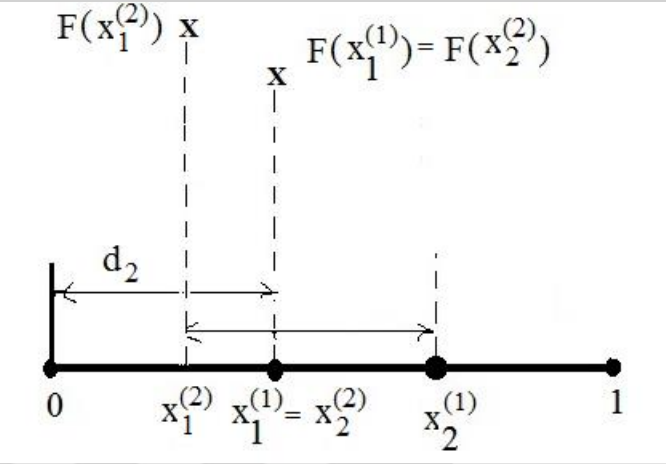
- Procedăm ca la pasul 1, înlocuind pe n cu n-1 şi pe 1 cu d_1:

$$d_2 = \frac{\theta_{n-2}}{\theta_{n-1}} \cdot d_1 = \frac{\theta_{n-2}}{\theta_{n-1}} \cdot \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} = \frac{\theta_{n-2}}{\theta_n}$$

- Folosind segmentul d_2, se obțin punctele de căutare:

$$x_1^{(2)} = d_1 - \frac{\theta_{n-2}}{\theta_n} = \frac{\theta_{n-3}}{\theta_n}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{\theta_{n-2}}{\theta_n} = x_1^{(1)}$$



- se determină valoarea funcției scop F(x) în punctul $x_1^{(2)}$, deoarece $F\left(x_2^{(2)}\right) = F(x_1^{(1)})$

- Dacă $F(x_1^{(2)}) > F(x_2^{(2)})$, maximul se va găsi în intervalul $[0; x_2^{(2)}]$. Lungimea sa este d_2.

6. Tehnici de optimizare

Pasul k:

- Lungimea intervalului de incertitudine este:

$$d_k = \frac{\theta_{n-k}}{\theta_n}$$

- Se calculează abscisele punctelor $x_1^{(k)}$ şi $x_2^{(k)}$. Valoarea funcției se calculează la fiecare pas pentru un singur punct, deoarece în celălalt punct este cunoscută de la pasul anterior.

Pasul n-2:

- Lungimea intervalului de incertitudine este: $$d_{n-2} = \frac{\theta_{n-n+2}}{\theta_n} = \frac{\theta_2}{\theta_n} = \frac{2}{\theta_n}$$

Pasul n-1:

- Lungimea intervalului de incertitudine este: $$d_{n-1} = \frac{\theta_{n-n+1}}{\theta_n} = \frac{\theta_1}{\theta_n} = \frac{1}{\theta_n} = 0{,}5 \cdot d_{n-2}$$

$\Rightarrow$ Punctele de încercare de la pasul n-1 coincid.

Pentru a avea un câştig în precizie, la sfârşit se mai plasează încă o valoare pentru variabila x care să se afle la cel puțin distanța **ε (pragul de sensibilitate)** de punctul anterior.

6. Tehnici de optimizare

Pragul de sensibilitate - reprezintă cea mai mică diferență între două puncte vecine x_i şi x_{i+1}, la care se pot distinge două valori diferite $F(x_i) \neq F(x_{i+1})$.

În această situație:

$$d_{n-1} = \frac{1}{\theta_n} + \varepsilon$$

La efectuarea a n-1 paşi s-au făcut n evaluări ale funcției scop $\Rightarrow$ intervalul de incertitudine final este:

$$l_n = \frac{1}{\theta_n} + \varepsilon$$

Dacă ε şi l_n sunt cunoscute $\Rightarrow$ se poate calcula θ_n, adică se poate stabili numărul de încercări necesare pentru o precizie dată de localizare a optimului.

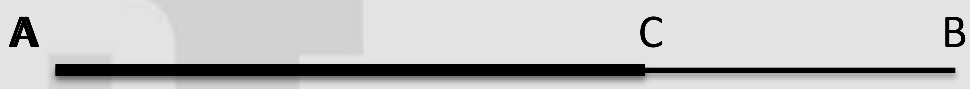
6. Tehnici de optimizare

Universitatea Politehnica Timişoara

3. Metoda secţiunii de aur

Secţiunea de aur: constă în secţionarea unui segment AB printr-un punct C, astfel încât să se formeze proporţionalitatea:

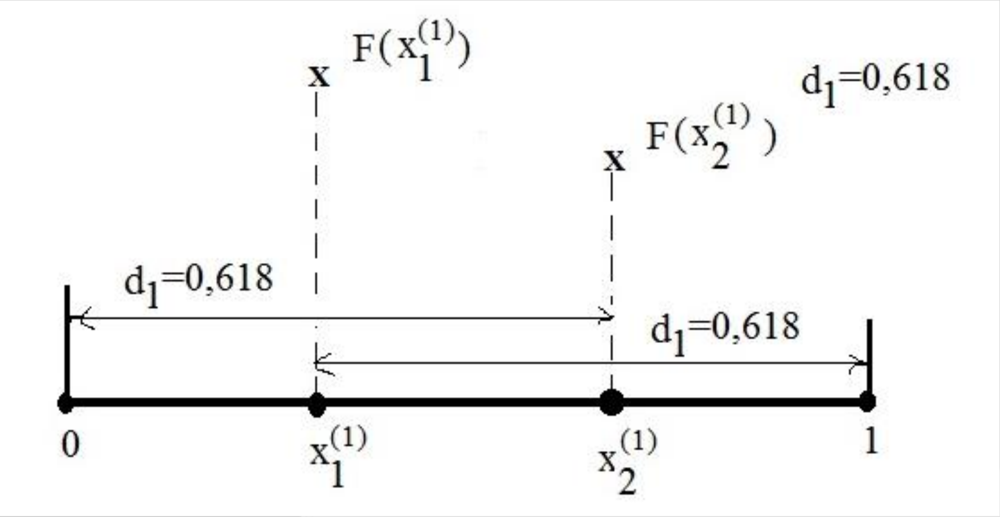
$$\boldsymbol{AC^2 = BC \cdot AB}$$



$$\left.\begin{array}{l} AB = 1 \\ AC = x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x^2 = (1-x).1 \\ x = 0,618 \end{array}$$

Algoritmul de căutare este următorul:

6. Tehnici de optimizare



- În intervalul de căutare [0,1], prin plasarea secțiunii de aur se obțin punctele: $x_1^{(1)}$ şi $x_2^{(1)}$
- Se calculează valoarea funcției scop în aceste puncte. Dacă se calculează un maxim se elimină intervalul $[x_2^{(1)}, 1]$
- În intervalul $[0, x_2^{(1)}]$ se continuă căutarea;
- Se consideră un segment egal cu 0,618 din acest interval $\Rightarrow d_2 = 0,618 \cdot 0,618 = 0,382$

$x_1^{(2)} = 0,618 - (0,618)^2 = 0,618\,(1-0,618) = 0,618 \cdot 0,382 = (0,618)^3$

$x_2^{(2)} = d_2 = 0,382 = x_1^{(1)}$

- se calculează valoarea funcției obiectiv în aceste noi puncte şi se elimină intervalul în care nu se află maximul.

6. Tehnici de optimizare

- La un pas oarecare k vom avea $d_k = (0,618)^k$, iar numărul total de valori atribuite variabile independente va fi $n = k+1$;
- Intervalul de incertitudine după n căutări este: $I_n = (0,618)^{n-1}$
- Dacă se cunoaște precizia dorită de localizare a optimului se poate calcula numărul n de căutări necesare pentru a atinge precizia dorită.