LABORATORUL NR. 5

MODELE MATEMATICE EXPERIMENTALE

Elaborarea experimentală a modelului matematic este necesară în următoarele situaţii:
- când procesul este insuficient cunoscut;
- când procesul este prea complex şi se doreşte un model mai simplu, bazat pe prelucrarea datelor experimentale.

Operaţia de determinare experimentală a modelului mai poartă şi numele de **identificare**.
Elaborarea modelelor statistice se bazează pe corelarea statistică a datelor experimentale.

In cazul modelelor statistice pentru regim staţionar, etapele de desfăşurare a identificării sunt urmatoarele:

1. inventarierea variabilelor;
2. alegerea formei modelului;
3. obţinerea şi testarea datelor;
4. determinarea coeficienţilor modelului;
5. testarea modelului.

1. Inventarierea variabilelor

Întrucât variabilele nesemnificative se elimină de la sine în cadrul analizei de regresie, este recomandabilă o oarecare largheţe în stabilirea lor. Creşterea numărului de variabile face necesară, pentru acelaşi nivel de încredere în model, creşterea numărului de date experimentale. Cel mai sigur mod de a nu greşi este examinarea unui model bazat pe ecuaţii de conservare (a unui model analitic).

2. Alegerea formei modelului

In cazul elaborării unui model matematic pentru regim staţionar, forma de bază a modelului este cea a unui sistem de ecuaţii algebrice.

Obişnuit, stabilirea numărului de ecuaţii se face pe baza împărţirii variabilelor în dependente(de ieşire) şi independente(de intrare). Această împărţire este adesea o chestiune de experienţă şi de bun simţ tehnic. Împărţirea se poate face şi pe baza unui model dedus analitic.

Dacă $u_1, u_2, ..., u_m$ sunt variabile independente (de intrare) şi $y_1 .... y_k$ sunt variabilele dependente (de ieşire), pentru forma relaţiilor de tipul:

$$y_j = f_j(u_1, u_2, ..., u_m); \qquad j=1, \ ..., \ k \qquad (1)$$

nu se pot indica reguli fixe (aceste relaţii constituie modelul matematic).

In cazul în care avem o singură variabilă independentă, reprezentarea grafică a datelor experimentale poate să ne sugereze o anumită formă a ecuaţiei (figura 1).

Stabilirea formei ecuaţiilor se mai poate face şi prin analiza dimensională. In mod arbitrar, se poate alege pentru exprimarea dependenţei o formă polinomială:

$$y(u_1, u_2, ..., u_m) = a_o + a_1 \cdot u_1 + ... + a_m \cdot u_m + a_{11} \cdot u_1^2 + a_{12} \cdot u_1 \cdot u_2 + ... + a_{1m} \cdot u_1 \cdot u_m + ... + a_{mm} \cdot u_m^2 + ... \qquad (2)$$

Alegerea unei forme de tipul ecuaţiei (2) este justificată de faptul că, în principiu, ea corespunde unei dezvoltări în serie trunchiată (de exemplu serie Taylor) a dependenţei reale y $(u_1, u_2, ..., u_n)$.

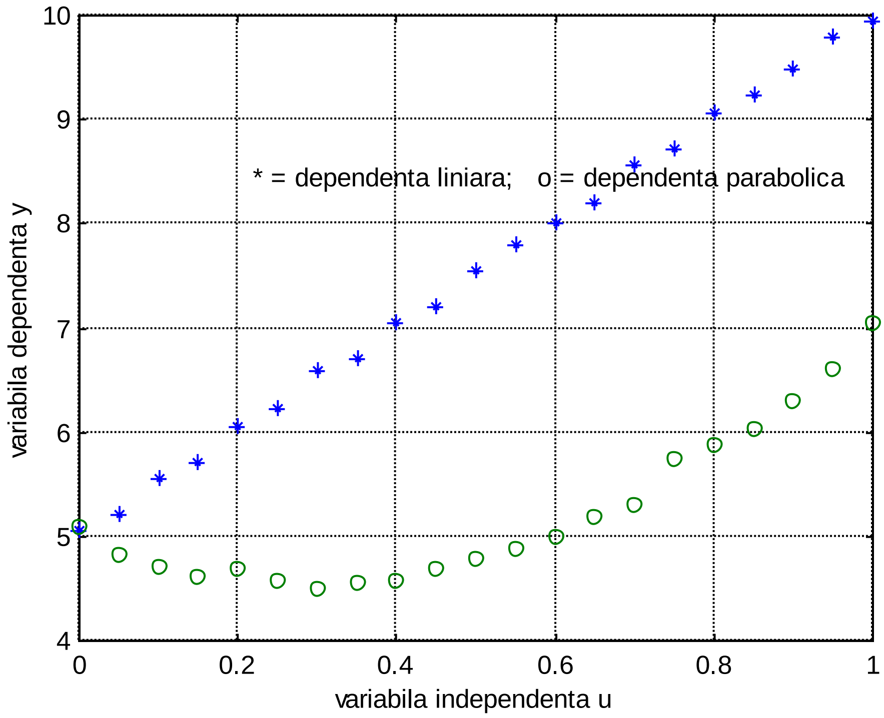

Figura 1 Stabilirea formei modelului matematic pe baza reprezentării grafice a datelor experimentale :« * » - dependenţa liniară $y=a_0+a_1 \cdot u$;« o » - dependenţa parabolică $y=a_0+a_1 \cdot u+a_2 \cdot u^2$;

3. Obţinerea şi testarea datelor

Experimentele trebuie să se desfăşoare astfel încât:

- numărul datelor experimentale să fie suficient de mare pentru a putea determina coeficienţii modelului ;
- experimentele să fie astfel distribuite încât să acopere în mod uniform domeniul de variaţie al variabilelor ;
- precizia determinărilor să fie corespunzătoare cerinţelor impuse modelului.

Dacă este posibil, este de dorit o planificare a experimentelor, de exemplu prin programare factorială. In cazul instalaţiilor industriale, nefiind posibilă o planificare a experimentelor, este necesar să se urmărească procesul un timp mai îndelungat (6 luni, 1 an).

Testarea şi interpretarea datelor experimentale poate include aspecte referitoare la testarea reproductibilităţii datelor, verificarea omogenităţii dispersiilor şi a normalităţii distribuţiilor, respectarea ecuaţiilor de conservare (bilanţ de materiale, termic) în cadrul fiecărui experiment, reconcilierea datelor de operare, reconciliere ce poate implica corectarea datelor preluate din instalaţie minimizând erorile în raport cu clasa de precizie a sistemelor de măsurare şi evaluarea valorilor mărimilor nemăsurate.

4. Determinarea coeficienţilor modelului

A). Estimatorul celor mai mici pătrate (metoda celor mai mici pătrate).

Aplicarea estimatorului celor mai mici pătrate impune variabilelor de intrare şi celor de ieşire o serie de condiţii (regim staţionar, mărimile de intrare nu sunt variabile aleatoare şi sunt reciproc independente, iar cele de ieşire sunt variabile aleatoare de repartiţie normală şi cu dispersie constantă) a căror îndeplinire trebuie testată. O utilizare corectă a metodei celor mai mici pătrate implică de asemenea o repartizare uniformă a valorilor variabilelor independente în domeniul lor de definiţie şi un număr însemnat de date experimentale.

a).Analiza de regresie cu o singură variabilă independentă

- **Cazul dependenţei liniare**

Pentru un proces cu o intrare *u* şi o ieşire *y*, informaţii preliminare (fie un model analitic, fie reprezentarea grafică a datelor experimentale) au dus la concluzia că dependenţa dintre *y* şi *u* este liniară:

$$y=a_0+a_1\cdot u \qquad (3)$$

Să presupunem că măsurând concomitent intrarea şi ieşirea s-a obţinut următorul set de date:

$$(u_1,\hat{y}_1),.....,(u_n\hat{y}_n)$$

Conform metodei celor mai mici pătrate, suma pătratelor abaterii valorilor măsurate $\hat{y}_i$ de la valorile y_i calculate pe baza relaţiei (3) trebuie să fie minimă:

$$F(a_o,a_1)=[\hat{y}_1-(a_o+a_1u_1)]^2+......+[\hat{y}_n-(a_o+a_1u_n)]^2=\sum_{i=1}^{n}[\hat{y}_i-(a_o+a_1u_i)]^2\overset{!}{=}\min. \qquad (4)$$

Estimarea coeficienţilor se realizează punând condiţia de minim pentru funcţia F : derivatele parţiale în raport cu coeficienţii a_o,a_1 se egalează cu zero.

$$\frac{\partial F(a_o,a_1)}{\partial a_o}=-2\left[na_o+a_1\sum_{i=1}^{n}u_i-\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i\right]=o$$

$$\frac{\partial F(a_o,a_1)}{\partial a_1}=-2\left[a_o\sum_{i=1}^{n}u_i+a_1\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\sum_{i=1}^{n}u_i\cdot\hat{y}_i\right]=o \qquad (5)$$

Rezultă următorul sistem :

$$\boxed{\begin{bmatrix} n & \sum u_i \\ \sum u_i & \sum u_i^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum \hat{y}_i \\ \sum \hat{y}_i\cdot u_i \end{bmatrix}} \qquad (6)$$

O primă modalitate de calcul al coeficienţilor a_0 şi a_1 constă în utilizarea relaţiei 6.
O altă modalitate posibilă de calcul utilizează algebra liniară oferită de MATLAB.
Pentru fiecare set de date se poate scrie ecuaţia :
$$\hat{y}_i=a_0+a_1\cdot u_i \qquad (7)$$
Coeficienţii a_0 şi a_1 se pot găsi prin soluţionarea următorului sistem de ecuaţii algebrice. :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \\ \hat{y}_i \\ \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ & \\ 1 & u_i \\ & \\ 1 & u_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Având in vedere forma matricii ce conţine datele de intrare, solverul MATLAB « \ » poate fi utilizat pentru calcularea coeficienţilor a_0 si a_1 ; intr-un astfel de caz, se face evaluarea coeficienţilor prin minimizarea sumei erorilor pătratice ale valorilor măsurate faţă de cele prezise de model.

Dacă notăm:

y – vectorul coloană al valorilor măsurate $\hat{y}$;
U – matricea mărimilor de intrare;
a – vectorul coloană al coeficienţilor modelului.

$$\boxed{a=U\setminus y}$$

Exemplul 1: Fie un proces cu o intrare *u* şi o ieşire *y*, pentru care forma presupusă a dependenţei dintre y şi u este:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u \qquad (9)$$

Să se determine a_0 şi a_1, setul de date experimentale fiind:

```
ui = 0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3  0.35  0.4  0.45  0.5
0.55  0.6  0.65  0.7 0.75  0.8  0.85 0.9 0.95 1

ŷ i = 5.05 5.2 5.55 5.7 6.05 6.22 6.58 6.7 7.05 7.21 7.55 7.8 8 8.2 8.57
8.72 9.07 9.23 9.48 9.78 9.95;
```

In programul MATLAB care urmează, după calculul valorii coeficienţilor, se realizează reprezentarea grafică a punctelor experimentale şi a dreptei de regresie (figura 2).

```
u=0:0.05:1;
u=u';
y=[5.05 5.2 5.55 5.7 6.05 6.22 6.58 6.7 7.05 7.21 7.55 7.8 8 8.2 8.57 8.72
9.07 9.23 9.48 9.78 9.95];
U=[ones(size(u)) u];
y=y';
a=U\y;
disp(a);
yanalitic=U*a;
plot(u,yanalitic,'-r',u,y,'*b');grid;
xlabel('variabila independenta u');
ylabel('variabila dependenta y');
```

Pentru coeficienţii a_0 şi a_1 s-au obţinut urmatoarele valori :

$a_0 = 5.0149$

$a_1 = 4.9855$

Deci ecuaţia modelului matematic al procesului este :

$$y = 5.0149 + 4.9855 \cdot u \qquad (10)$$

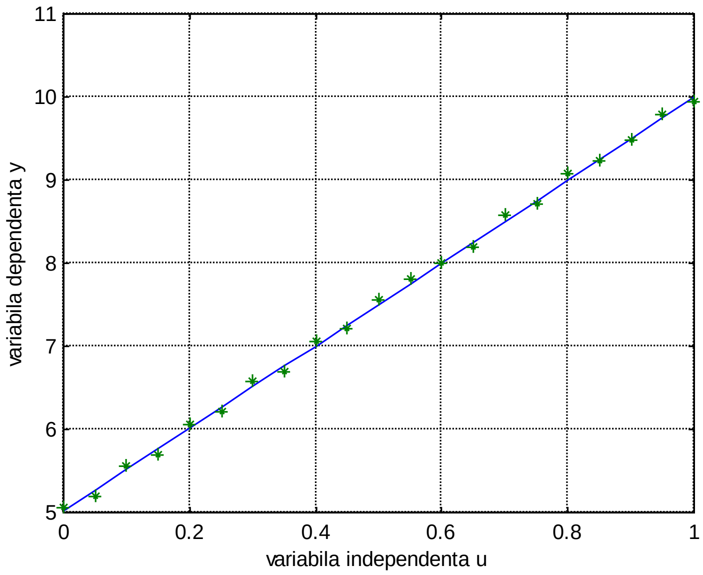

Figura 2. Reprezentarea grafica a datelor experimentale şi a dreptei de regresie pentru exemplul 1

- **Cazul dependenţei neliniare**

Se pot întâlni două situaţii:

- *dependenţa nu este liniară dar este liniarizabilă.*

Exemplu:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= k \cdot e^{a \cdot u} \; / \, ln \\ ln\, y &= ln\, k + a \cdot u \end{aligned}} \quad (11)$$

Prin logaritmare, relaţia 11 devine liniară dar în ecuaţia (7) în locul valorilor y_i măsurate se va introduce $ln(\hat{y}_i)$ iar a_0 rezultat din calcul este de fapt ln(k).

- *dependenţa dintre y şi u nu este liniarizabilă.*

Exemplu: $\boxed{y = a_0 + a_1.u + a_2.u^2}$ (12)

Pentru calculul coeficienţilor modelului se poate aplica tot metoda celor mai mici pătrate:

$$F(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\hat{y}_i - \left(a_0 + a_1 u_i + a_2 u_i^2\right)\right]^2 \overset{!}{=} \min. \quad (13)$$

Egalând cu zero derivatele parţiale în raport cu coeficienţii a_0, a_1 şi a_2 după aranjarea termenilor, se obţine următorul sistem (scris matricial):

$$\begin{bmatrix} n & \sum u_i & \sum u_i^2 \\ \sum u_i & \sum u_i^2 & \sum u_i^3 \\ \sum u_i^2 & \sum u_i^3 & \sum u_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{y}_i \\ \sum \hat{y}_1 \cdot u_i \\ \sum y_i \cdot u_i^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

<u>Exemplul 2</u> : Fie un proces cu o intrare u şi o ieşire y, proces pentru care s-a ajuns la concluzia că dependenţa teoretică dintre y şi u este de forma (12). Setul de date experimentale este :

```
ui = 0  0.05  0.1  0.15  0.2  0.25  0.3   0.35  0.4  0.45  0.5  0.55  0.6
0.65  0.7 0.75  0.8  0.85   0.9  0.95  1 ;

ŷ i=5.1 4.82 4.7 4.62 4.69 4.58 4.5  4.55  4.57 4.69  4.79 4.88 5  5.19 5.3
5.75 5.88 6.03 6.3  6.6  7.05.
```

Ca şi în cazul exemplului 1, şi în cazul regresiei polinomiale (aici, de ordinul II), vom utiliza din nou solverul MATLAB « \ » pentru calculul valorii coeficienţilor din ecuaţia (12) (o altă posibilitate este de a realiza un program care să implementeze ecuaţia 14). Pentru fiecare set de date se poate scrie :

$\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot u_i + a2 \cdot u_i^2$ (15)

Coeficientii din ecuaţia (12) se pot determina pe baza soluţionării numerice a următorului sistem de ecuaţii :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \\ \hat{y}_i \\ \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ \\ 1 & u_i & u_i^2 \\ \\ 1 & u_n & u_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dacă notăm:
y – vectorul coloană al valorilor măsurate $\hat{y}$;
U – matricea mărimilor de intrare;
a – vectorul coloană al coeficienţilor modelului.

coeficientii din ecuaţia (12) rezultă din relaţia:

$\boxed{a = U \setminus y}$

Programul ce urmează calculează, pornind de la relaţia 17, coeficienţii modelului şi realizează reprezentarea grafică a punctelor experimentale şi a ecuaţiei de regresie (figura 3) :

```
u=0:0.05:1;
u=u';
y=[5.1 4.82 4.7 4.62 4.69 4.58 4.5 4.55 4.57 4.69 4.79 4.88 5 5.19 5.3 5.75
5.88 6.03 6.3 6.6 7.05];
U=[ones(size(u)) u u.^2];
y=y';
a=U\y;
disp(a);
yanalitic=U*a;
plot(u,yanalitic,'-r',u,y,'*b');grid ;
xlabel('variabila independenta u');
ylabel('variabila dependenta y');
```

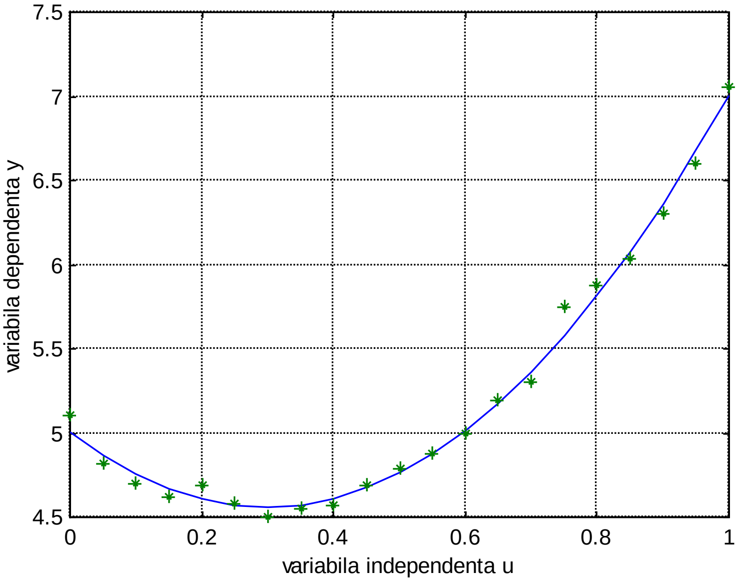

Figura 3 Reprezentarea grafică a punctelor experimentale şi a ecuaţiei de regresie pentru ex. 2

Valorile coeficienţilor din ecuaţia 12 sunt :

$a_0 = 5.0007$ $a_1 = -2.9596$ $a_2 = 4.9686$

In mod asemănător se poate proceda şi când ecuaţia de regresie constă într-un polinom de ordin superior.

Deci ecuaţia modelului matematic al procesului este :
$y = 5.0007-2.9596 \cdot u+4.9686 \cdot u^2$

b). Analiza de regresie multiplă

Cazul cel mai general al modelării proceselor statice este cazul procesului cu mai multe intrări $u_1,...u_m$ şi o singură ieşire y . Problema determinări modelului pentru procesele cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri se reduce la acest caz (fiecare ieşire se exprima în funcţie de mărimile de intrare).
Dacă:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u_1 + ... + a_m \cdot u_m \qquad (17)$$

este forma modelului matematic (o ieşire şi m intrări), determinarea coeficienţilor $a_0, . . . , a_m$ se efectuează minimizând suma abaterilor pătratice ale valorilor măsurate ale ieşirii $\hat{y}_i$ faţă de cele calculate pe baza relaţiei17.

$$F(a_0,...,a_m) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \min \qquad (18)$$

Dacă U este matricea valorilor măsurate ale variabilelor de intrare şi y este vectorul valorilor măsurate ale variabilei de ieşire:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{11} & u_{21} \cdots u_{m1} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 1 & u_{1n} & u_{2n} \cdots u_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \qquad y = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ . \\ . \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

atunci vectorul parametrilor modelului se calculează pe baza relaţiei :

$$A = U \backslash y \qquad (19)$$

O utilizare corectă a estimatorului celor mai mici pătrate implică o repartizare uniformă a valorilor variabilelor independente în domeniul lor de definiţie şi un număr însemnat de date experimentale.

In cazul în care structura modelului este neliniară în raport cu parametrii, punând din nou condiţia de minim a sumei abaterilor pătratice ale valorilor măsurate faţă de cele calculate pe baza ecuaţiei de regresie, se obţine un sistem de ecuaţii algebrice neliniare. Rezolvarea unor astfel de sisteme este posibilă numeric utilizând tehnici specifice: algoritmului Newton - Raphson, algoritmul Broyden, etc.

Exemplul 3 : Să se coreleze procentul y de gaz absorbit într-o coloană de absorbţie, cu temperatura gazului u_1 şi presiunea de vapori a lichidului u_2. Se propune o relaţie de tipul:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2$$

u_1 [^{0}C]	u_2, [mm Hg]	$\hat{y}$, [%]
78	1	1,5
113,5	3,2	6
130	4,8	10
154	8,4	20
169	12	30
187	18,5	50
206	27,5	80
214	32	100

```
u1=[78 113.5 130 154 169 187 206 214];
u1=u1';
u2=[1 3.2 4.8 8.4 12 18.5 27.5 32];
u2=u2';
y=[1.5 6 10 20 30 50 80 100];
y=y';
U=[ones(size(u1)) u1 u2];
```

```
a=U\y;
disp('Coeficientii modelului matematic sunt:');
disp('a0='); disp(a(1));
disp('a1='); disp(a(2));
disp('a2='); disp(a(3));
plot3(u1,u2,y,'*');grid;
xlabel('variabila independenta u1');
ylabel('variabila independenta u2');
zlabel('variabila dependenta y');
```

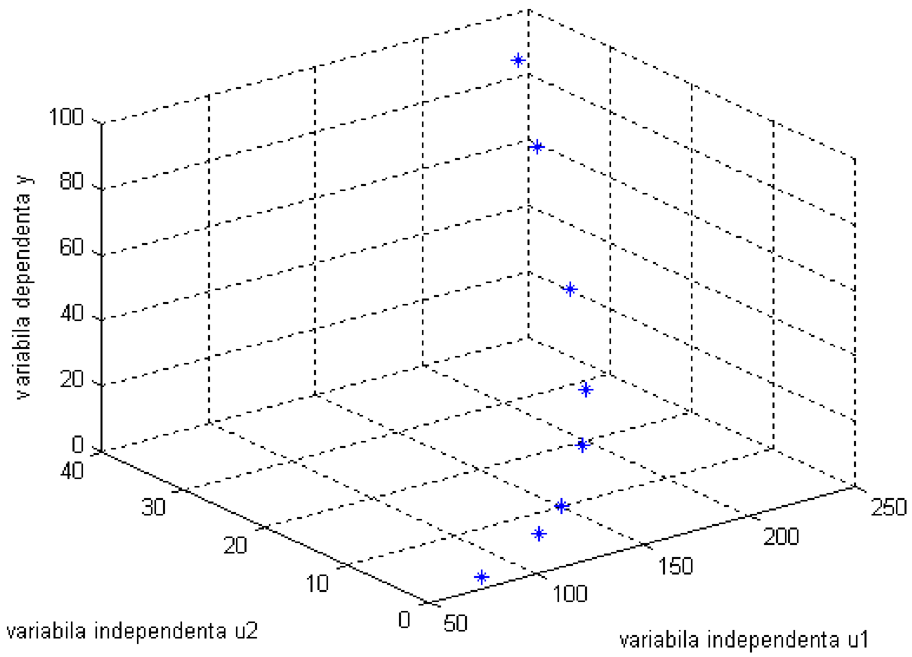

Figura 4 Reprezentarea grafică a punctelor experimentale pentru ex. 3

Valorile coeficienţilor din ecuaţia 17 sunt :

$$a_0 = 9.4397 \quad a_1 = -0.1384 \quad a_2 = 3.6796$$

Deci ecuaţia modelului matematic al procesului este :

$$y = 9.4397 - 0.1384 \cdot u_1 + 3.6796 \cdot u_2$$

Exerciţii:

1. Să se determine ecuaţia de regresie care exprimă relaţia dintre concentraţia ionilor de sodiu (C_{Na}) şi intensitatea curentului (I) citită la galvanometrul unui flanfotometru. Se presupune că dependenţa este liniară.

C_{Na}, [mg/l]	2	6	8	10	14	16	18	20	22	24
I, [gradaţii]	5	13	16	24	27	31	35	41	43	49

2. Să se stabilească dreapta de etalonare pentru determinarea fotometrică a benzenului în soluţie etanolică. Se cunosc concentraţiile X si extincţiile Y.

X	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Y	0,2	0,37	0,64	0,93	1,22	1,5	1,8

3. Efectul temperaturii X asupra activităţii catalitice Y este dat de o funcţie de tipul: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2$. Să se coreleye rezultatele experimentale si sa se determine coeficienţii ecuaţiei de corelaţie:

X	2	4	6	8	10	12	14	16

Y	0,846	0,573	0,401	0,288	0,209	0,153	0,111	0,078

4. Să se determine ecuaţia polinomială care exprimă relaţia dintre alungirea fibrelor de vîscoză şi concentraţia $ZnSO_4$ din baia de filare. Setul de date experimentale este:

C_{ZnSO4}, [g/l]	11,6	14,1	17,3	20,8	22,3	22,4	24,5
Alungire, [%]	9,9	10,2	11,1	11,3	11,7	12	11,7

5. Un muncitor efectuează o muncă fizică în diferite condiţii atmosferice şi pe diferite intervale de timp. Să se coreleze cantitatea de apă (Q) pe care acesta o consumă cu temperatura mediului în care lucrează (T) şi cu durata activităţii (t). Setul de date experimentale este:

t, [h]	1,85	1,25	1,5	1,75	1,15	1,85	1,6
T, [^{0}C]	24	28	29	29	33	36	37
Q, [l]	0,5	0,6	0,74	0,8	0,95	1,42	1,42

6. Să se coreleze presiunea de vapori P_1 a apei absorbite de un gel de silice cu presiuena de vapori P a apei pure. Relaţia de dependenţă este de forma: $Y = a_0 \cdot a_1^X$.

   Datele esperimentale sunt:

P_1 apă absorbită, [mm Hg]	0,038	0,08	0,174	0,448	1,43	5,13	9,45
P apă pură, [mm Hg]	0,2	0,4	0,8	2	6	20	35

FUNCŢII MATLAB UTILIZATE ÎN OPTIMIZARE

Funcţiile MATLAB utilizate la rezolvarea unor probleme simple de optimizare sunt:

`fminbnd` – furnizează minimul unei funcţii de o variabilă pe un interval fix.

`fminsearch` - furnizează minimul unei funcţii obiectiv multivariabile

Sintaxa funcţiilor:

x = fminbnd('fobiectiv',xmin,xmax)

unde:
x – soluţia problemei;
fobiectiv – numele fişierului MATLAB de tip function în care se defineşte funcţia obiectiv;
xmin – limita inferioară a domeniului de căutare;
xmax – limita superioară a domeniului de căutare.

x = fminsearch('fobiectiv',x0)

unde:
x – soluţia problemei;
fobiectiv – numele fişierului MATLAB de tip function în care se defineşte funcţia obiectiv;
x0 – vectorul de start.

<u>Exemplul 1.</u>

Să se găsească minimul următoarei funcţii obiectiv: $y = x^2-6x+8$, pe intervalul de căutare $x \in [0,5]$. Să se afişeze valoarea lui x pentru care funcţia obiectiv este minimă, respectiv valoarea minimă a funcţiei obiectiv. Să se reprezinte grafic variaţia funcţiei obiectiv pe intervalul de căutare $x \in [0,5]$.

Rezolvare:

1. Se crează un fişier MATLAB de tip function în care se scrie funcţia obiectiv:

```
function y=fob1(x);
y=x^2-6*x+8;
```

Se salvează fişierul cu numele dat funcţiei: fob1.m.

2. Se crează un fişier afob1.m în care se foloseşte funcţia de apelare a minimului unei funcţii (fminbnd).

```
xmin=0;
xmax=5;
x=fminbnd('fob1',xmin,xmax);
disp('Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:');
disp(x);
disp('Valoarea minima a functiei obiectiv este:');
disp(x^2-6*x+8);
k=1; x=0; pas=0.01;
while x<=5
    xvect(k)=x;
    y=x.^2-6*x+8;
    yvect(k)=y;
    k=k+1;
    x=x+pas;
end;
plot(xvect,yvect,'m'); grid;
xlabel('x');
ylabel('y');
```

Soluţie:

```
>> Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:
     3
Valoarea minima a functiei obiectiv este:
    -1
```

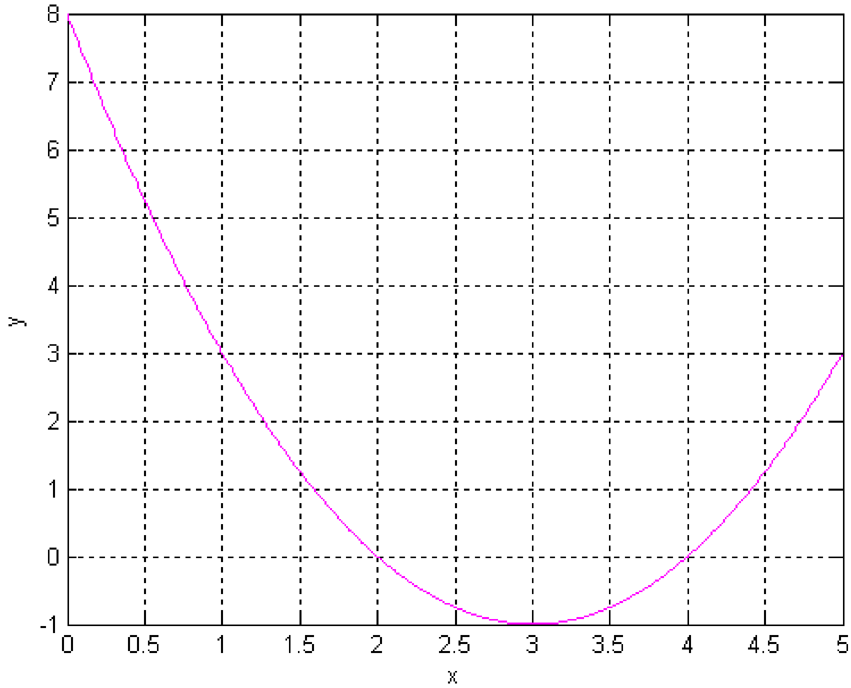

Fig. 1. Evoluţia funcţiei obiectiv pe intervalul de căutare x∈ [0,5]

Exemplul 2.

Să se determine grosimea optimă a unei izolaţii termice pentru transportul aburului saturat (p = 5 bar), conducta având diametrul exterior de 60 mm (r_{extc} = 30 mm) şi lungimea L=100 m. Se consideră că aburul trebuie livrat timp de 7500 ore/an, iar durata de amortizare a conductei este de 5 ani.

Costul total de operare pe durata unui an este alcătuit din costul amortizării investiţiei şi costurile de operare – acestea fiind date de valoarea pierderilor de căldură prin izolaţie.

$$\boxed{C_{total} = C_{amortizare\,invetitite} + C_{operare\,anuala} = \min}$$

Cheltuieli legate de investiţie:

$$\boxed{C_{amortizare\,invetitie} = V_{iz} \cdot \rho_{iz} \cdot c_{iz} \cdot r_{am}}$$

unde:

- V_{iz} – volumul izolaţiei, m^3;
- ρ_{iz} - densitatea izolaţiei, kg/m^3;
- c_{iz} - costul izolaţiei (se include şi montajul), lei/kg;
- r_{am} - 1/durata de amortizare;

$$V_{iz} = \pi \cdot L \cdot \left[(r_{extc} + \delta_{iz})^2 - r_{extc}{}^2\right] = \pi \cdot L \cdot \delta_{iz} \cdot \left(\delta_{iz} + 2 \cdot r_{extc}\right)$$

unde:

- L – lungimea conductei, m;
- r_{extc} – raza exterioară a conductei, m;
- δ_{iz} - grosimea izolaţiei ;

Cheltuieli legate de operare :

$$\boxed{C_{operare} = Q_p \cdot c_{en} \cdot t_{op}}$$

unde:

- Q_p - căldura anuală pierdută prin izolaţie, kW;
- c_{en} - costul energiei, lei/kW ;
- t_{op} - timpul de operare, ore.

Dacă se neglijează rezistenţa la transfer prin conducţie a peretelui metalic, transferul de căldură prin pereţi este :

$$Q_p = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (t_{abur} - t_{ext})}{\dfrac{\delta_{iz}}{\lambda_{iz} \cdot r_{iz}} + \dfrac{1}{\alpha_t \cdot r_{ext}^{iz}}}$$

unde :

- α_t - coeficientul parţial de transfer termic de la izolaţie la aerul ambiant ;

$$r_{iz} = \frac{(r_{extc} + \delta_{iz}) - r_{extc}}{\ln\left(\dfrac{r_{extc} + \delta_{iz}}{r_{extc}}\right)} = \frac{\delta_{iz}}{\ln\left(1 + \dfrac{\delta_{iz}}{r_{extc}}\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_{total} &= C_{amortizare\,invetitite} + C_{operare\,anuala} = \\ &= \pi \cdot L \cdot \delta_{iz} \cdot \rho_{iz} \cdot c_{iz} \cdot r_{am} \cdot \left(\delta_{iz} + 2 \cdot r_{extc}\right) + \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (t_{abur} - t_{ext})}{\dfrac{1}{\lambda_{iz}} \cdot \ln\left(1 + \dfrac{\delta_{iz}}{r_{extc}}\right) + \dfrac{1}{\alpha_t \cdot (r_{extc} + \delta_{iz})}} \end{aligned}}$$

Valori numerice:

L=100 m; ρ_{iz} =30 kg/m^3; r_{extc}=30 mm; c_{iz}=100 lei/kg; durata de amortizare = 5 ani; ram=0.2; c_{en}=0.4 lei/kWh; t_{abur}=158^{0}C; t_{op}=7500 ore; t_{ext}=15^{0}C; α_t =6 W/(m^2*grd); λ_{iz} =0.04 W/(m*grd)

Rezolvare:

1. Se crează un fişier MATLAB de tip function în care se scrie funcţia obiectiv:

```
function cost=fobiectiv1(deltaiz);
global L rhoiz ciz ram rextc cen costWh lamdaiz alfat text tabur top
cost=pi*L*deltaiz*rhoiz*ciz*ram*(2*rextc+deltaiz)+2*pi*L*costWh*top*(tabur-
text)/(1/lamdaiz*log(1+deltaiz/rextc)+1/(alfat*(rextc+deltaiz)));
```

Se salvează fişierul cu numele dat funcţiei: fobiectiv1.m.

2. Se crează un fişier opt_iz.m în care se foloseşte funcţia de apelare a minimului unei funcţii (fminbnd).

```
global L rhoiz ciz ram rextc cen costWh lamdaiz alfat text tabur top
L=100; %Lungime conducta-m;
rhoiz=30;%densitate izolatie kg/m3
ciz=100; %costul izolatiei lei/kg
%durata de amortizare = 5 ani;
ram=0.2; % 1/5
rextc=0.03;%raza exterioara conducta, m
cen=0.4; %costul energiei, lei/kWh
costWh=cen/1000;%costul energiei, lei/Wh
lamdaiz=0.04; % conductivitate termica, W/(m*grd)
alfat=6; % coeficient de transfer termic, W/(m2*grd)
text=15; %temperatura exterioara, grd. C
tabur=158;%temperatura abur, grd.C.
top=7500; %timp operare, ore

% grosimea optima a izolatiei unei conducte;
deltaizmin=0;
deltaizmax=0.4;
deltaiz=fminbnd('fobiectiv1', deltaizmin, deltaizmax);
disp('Diametrul optim al izolatiei, exprimat in m, este:');
disp(deltaiz);
disp('Costul total optim de operare, lei=');
disp(pi*L*deltaiz*rhoiz*ciz*ram*(2*rextc+deltaiz)+2*pi*L*costWh*top*(tabur-
text)/(1/lamdaiz*log(1+deltaiz/rextc)+1/(alfat*(rextc+deltaiz))));

k=1; deltaiz=0.0; ddiz=0.001;
while deltaiz<=0.4
   vdiz(k)=deltaiz;
costtotal=pi*L*deltaiz*rhoiz*ciz*ram*(2*rextc+deltaiz)+2*pi*L*costWh*top*(t
abur-text)/(1/lamdaiz*log(1+deltaiz/rextc)+1/(alfat*(rextc+deltaiz)));
   vcost(k)=costtotal;
   deltaiz=deltaiz+ddiz;
   k=k+1;
end;
plot(vdiz,vcost,'r-');grid;
xlabel('diametrul izolatiei, m');
ylabel('Cost total, lei');
```

Soluţie:

```
>> Diametrul optim al izolatiei, exprimat in m, este:
     0.0863

Costul total optim de operare, lei=
   1.0014e+004
```

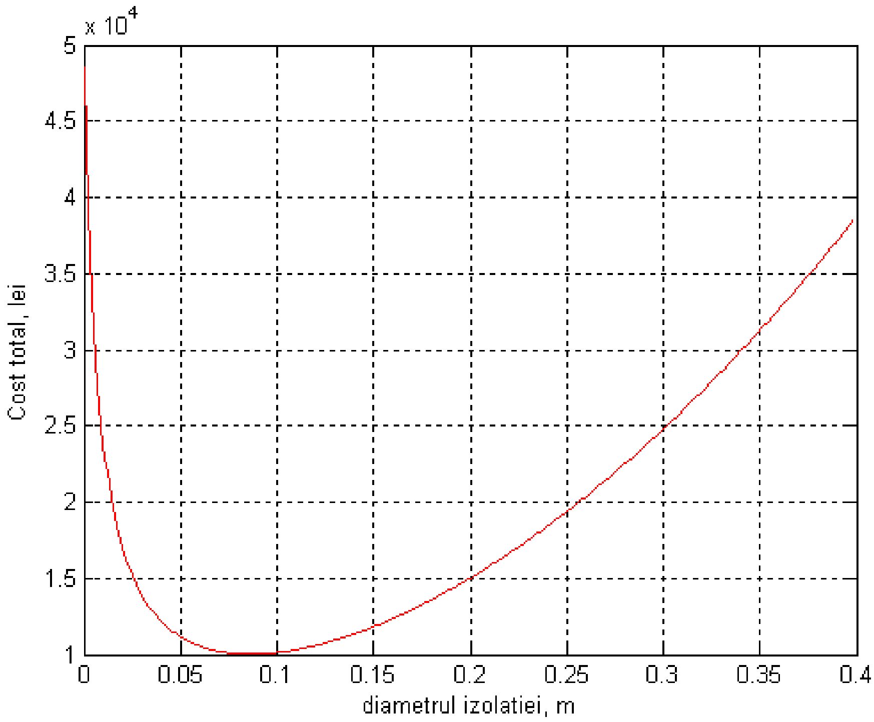

Fig. 2. Evoluţia funcţiei obiectiv pentru un diametru al izolaţiei cuprins între 0 şi 0,4 m

Exemplul 3.

Să se găsească minimul următoarei funcţii obiectiv: $y = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1$, ştiind că vectorul de start este x0=[1 1]. Să se afişeze valoarea vactorului x pentru care funcţia obiectiv este minimă, respectiv valoarea minimă a funcţiei obiectiv.

Rezolvare:

1. Se crează un fişier MATLAB de tip function în care se scrie funcţia obiectiv:

```
function y=fob3(x);
y=4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1;
```

Se salvează fişierul cu numele dat funcţiei: fob3.m.

2. Se crează un fişier afob3.m în care se foloseşte funcţia de apelare a minimului unei funcţii obiectiv multivariabile (fminsearch).

```
x0=[1 1];
x=fminsearch('fob3',x0);
disp('Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:');
disp(x);
disp('Valoarea minima a functiei obiectiv este:');
disp(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
```

Soluţie:

```
>> Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:
   0.50002678567574  -1.00003064121107

Valoarea minima a functiei obiectiv este:
    1.464675047913033e-009
```

Exerciţiul 1.

Să se găsească minimul următoarei funcţii obiectiv: y = cos(x)-2ln(x), pe intervalul de căutare x∈ [π/2,4π]. Să se afişeze valoarea lui x pentru care funcţia obiectiv este minimă, respectiv valoarea minimă a funcţiei obiectiv. Să se reprezinte grafic variaţia funcţiei obiectiv pe intervalul de căutare x∈ [π/2,4π].

Soluţie:

```
>> Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:
    9.6339

Valoarea minima a functiei obiectiv este:
   -5.5088
```

Exerciţiul 2.

Într-un reactor cu amestecare perfectă în regim izoterm are loc reacţia:

$A \xrightarrow{k} B$

Să se determine volumul V_R al reactoruluişi concentraţia componentului A la ieşire astfel încât costul unei producţii din componentul B de 2 kmoli/h să fie minim.

Se cunosc:

- concentraţia componentului A la intrarea în reactor: c_{A0} = 2,5 kmol/m^3;
- preţul reactantului A: $cost_A$=150 lei/kmol A;
- costul exploatării şi întreţinerii reactorului: $cost_{EI}$=10 lei/(m^3 h);
- constanta de viteză de reacţie la temperatura de lucru: k = 1 h^{-1}.

Deducerea funcţiei obiectiv:

Fie F_v – debitul de alimentare, m^3/h; c_A – concentraţia componentului A la ieşirea din reactor, kmol/m^3. F_v initial se consideră 1 m^3/h.

Cheltuielile pentru o oră de exploatare sunt:

$$\boxed{Cost = \cos t_A \cdot F_v \cdot c_{A0} + \cos t_{EI} \cdot V_R = \min}$$

Prin înlocuire se obţine:

$$\boxed{Cost = 150 \cdot 2.5 \cdot F_v + 10 \cdot V_R = 375 \cdot F_v + 10 \cdot V_R = \min} \qquad (1)$$

Modelul matematic al reactorului în regim staţionar:

- *bilanţul pentru reactantul A:*

$$F_v \cdot c_{A0} - F_v \cdot c_A - V_R \cdot k \cdot c_A = 0$$

$$2.5 \cdot F_v - F_v \cdot c_A - 1 \cdot V_R \cdot c_A = 0$$

$$\boxed{F_v \cdot (2.5 - c_A) - V_R \cdot c_A = 0} \qquad (2)$$

- *bilanţul pentru reactantul B:*

$$F_v \cdot c_{A0} - F_v \cdot c_A = 2$$

$$\boxed{F_v \cdot (2.5 - c_A) = 2} \qquad (3)$$

Modelul este constituit din două relaţii (2) şi (3) şi din 3 variabile V_R, c_A şi F_v. În consecinţă una dintre ele (de exemplu F_v) va constitui variabilă de decizie.

Pentru soluţionare se exprimă c_A şi V_R în funcţie de F_v:

$$\xrightarrow{(3)} c_A = \frac{F_v \cdot 2.5 - 2}{F_v} = 2.5 - \frac{2}{F_v}$$

$$\xrightarrow{(2)} V_R = \frac{F_v \cdot (2.5 - c_A)}{c_A} = \frac{(2.5 - 2.5 + \frac{2}{F_v}) \cdot F_v}{2.5 - \frac{2}{F_v}} = \frac{2}{2.5 - \frac{2}{F_v}} = \frac{2 \cdot F_v}{2.5 \cdot F_v - 2}$$

Înlocuind aceste valori în expresia funcţiei obiectiv se obţine noua expresie ce trebuie minimizată:

$$\boxed{Cost(F_v) = 375 \cdot F_v + 10 \cdot \frac{2 \cdot F_v}{2.5 \cdot F_v - 2} = \min}$$

Soluţie:

```
valoare lui FV pt care fct obiectiv este min este:
    0.9307

valoarea min a fct obiectiv Cost este:
  405.9796

volumul reactorului va fi
    5.6981

concentratia CA la iesire va fi
    0.3510
```

Exerciţiul 3.

Să se găsească minimul următoarei funcţii obiectiv: $y = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$, ştiind că vectorul de start este x0=[3 -1 0 1]. Să se afişeze valoarea vactorului x pentru care funcţia obiectiv este minimă, respectiv valoarea minimă a funcţiei obiectiv.

Soluţie:

```
Valoarea lui x pentru care functia obiectiv este minima este:
    0.0094   -0.0009    0.0166    0.0166

Valoarea minima a functiei obiectiv este:
  1.3906e-006
```